ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\mathrm{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ell n(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x \left(h(x) + \ell n2\right), \quad x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\, du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$ (μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x \geq x_0$ με $x=x(t),\ y=y(t),\ t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \left(x f(x) + 1 - e\right)^2 \left(x - 2\right)^2, \quad x \in \left(0, +\infty\right)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου: σελ. 251

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου: σελ. 273

…, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου: σελ. 150

…, όταν f(x)$\leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Α4. Λ αφού $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$

Σ σελ. 178

Σ σχόλιο σελ. 260

Σ θεώρημα 2^{o} σελ. 332

Λ σχόλιο σελ. 254

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4i = 0$

$2x^2 + 2y^2 + 2xi - 4 - 2i = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 4 + (2x-2)i = 0$

$x^2 + y^2 = 2$ πρέπει και x=1 , y=± 1

Επομένως z_1=1+i και z_2=1-i

Β2. $\omega = 3(\frac{z_1}{z_2})^{39}$

$= 3(\frac{1+i}{1-i})^{39}$

$= 3(\frac{1-1+2i}{2})^{39} = 3i^{39} = -3i$

B3.

$$|u+\omega| = |4z_1 - z_2 - i|$$

$$|u-3i| = |4+4i-1+i-i|$$

$$|u-3i| = |3+4i|$$

$$|u-3i| = 5$$

γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με: K(0,3), R=5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. h(x)= $x-\ln(e^x+1),\ x\in\Re$

$$h(x)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

$h''(x)=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$ για κάθε $x\in\Re$

Γ2. $h(x)=x-\ln(e^x+1)=\ln e^x-\ln(e^x+1)=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1},x\in\Re$

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

$e^{h(2h'(x))}<\dfrac{e}{e+1}$ $\qquad$ $h'(0)=\dfrac{1}{2}$

$$\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)\underset{\Re}{\overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow}}x>0$$

Γ3. $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim_{u\to1}\ln u=0$

Άρα y=0 οριζόντια στο $+\infty$

$$u=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$u_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$u\to1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+1))=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x]=\lim_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)]=0$$

Άρα η y=x

Γ4. $\Phi(x)=e^x(h(x)+\ln 2),\ x\in\Re$

$\Phi(x)=0$

$h(x)+\ln 2=0$

$h(x)=-\ln 2$

$h(x)=\ln\frac{1}{2}$

$$\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2e^x=e^x+1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

$$E(\Omega)=\int_0^1|\Phi(x)|\,dx$$

$e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$

$$h(x)+\ln 2>0\Leftrightarrow h(x)>-\ln 2\Leftrightarrow h(x)>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{e^x}{e^x+1}>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$2e^x>e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$$

$$E(\Omega)=\int_0^1\Phi(x)dx=\int_0^1 e^x(x-\ln(e^x+1)+\ln 2)dx=\int_0^1(xe^x-e^x\ln(e^x+1)+e^x\ln 2)dx=$$

$$\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)+\int_0^1 e^x\ln 2dx=\int_0^1 x(e^x)'dx-\int_0^1(e^x+1)'\ln(e^x+1)+\ln 2[e^x]_0^1=$$

$$[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx-[(e^x+1)\ln(e^x+1)]_0^1+\int_0^1(e^x+1)\frac{e^x}{e^x+1}dx+\ln 2[e^x]_0^1=$$

$$=e-((e+1)\ln(e+1)-2\ln 2)+\ln 2(e-1)=e-(e-1)\ln(e+1)+2\ln 2-\ln 2+e\ln 2=$$

$$=e-(e+1)\ln(e+1)+\ln 2+e\ln 2=e-\ln(e+1)^{e+1}+\ln 2+\ln 2^e=$$

$$=e-\ln(e+1)^{e+1}+\ln 2\cdot 2^e=e-\ln(e+1)^{e+1}+\ln 2^{e+1}=\ln\frac{2^{e+1}}{(e+1)^{e+1}}+e$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{\Delta.\text{I.M}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

με $g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1, \quad x \in R$

$$g'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

Άρα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Έχω $g(x) \geq g(0) = 0, \qquad x \in R$

Άρα:

x		0	
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

Δηλαδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R .

Δ2.

1ος τρόπος

$G(x)=\int_1^x f(u)du$ με $G'(x)=f(x)>0$

Άρα $G \uparrow$ δηλ. 1-1

$G(1)=\int_1^1 f(u)du=0$

Άρα: $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0 \Leftrightarrow G(2f'(x))=G(1) \Leftrightarrow 2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$

2ος τρόπος

α) f συνεχής στο R και $\uparrow$ άρα:

$$f(R)=(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))=(0, +\infty)$$

Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)\cdot\frac{1}{x}=(-1)\cdot 0=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

Άρα $f(x)>0,\ x\in R$

Αν υπάρχει $x_0\in R$ με $2f'(x_0)>1$

Τότε: $\int_1^{2f'(x_0)} f(u)du>0$ άτοπο.

Αν υπάρχει $x_0\in R$ με $2f'(x_0)<1$

Τότε: $\int_1^{2f'(x_0)} f(u)du<0$ άτοπο.

Άρα:

$$2f'(x)=1 \Leftrightarrow 2f'(x)-1=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\cdot e^x-2e^x+2-x^2=0$$

Προφανής ρίζα χ=0

Έστω $\phi(x) = 2xe^x - 2e^x + 2 - x^2$, $x \in R$

$$\phi'(x) = 2e^x + 2xe^x - 2e^x - 2x = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{2x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(e^x - 1)}$$

x		0	
ϕ'	+	0	+
ϕ	↗		↗

Άρα η χ=0 μοναδική ρίζα.

β) Έχω $y(t) = f(t)$ άρα:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}, & x(t) \neq 0 \\ 1 \ , & x(t) = 0 \end{cases}$$

Θέλω $x'(t) = 2y'(t)$

Άρα έχοντας

$$f(x(t)) = y(t)$$

$$f'(x(t)) \cdot x'(t) = y'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \overset{x'(t) \neq 0}{\Longleftrightarrow} f'(x(t)) = \frac{1}{2}$$

Άρα $x(t) = 0$ από Δ. 2^{α}, άρα $y(t) = 1$ δηλαδή έχω το σημείο Μ(0, 1).

Δ3.

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 \cdot (x-2)^2 = (x \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e)^2 \cdot (x-2)^2 = (e^x - e)^2 \cdot (x-2)^2$$

$$g'(x) = 2(e^x - e) \cdot e^x \cdot (x-2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2(x-2) = 2(e^x - e) \cdot (x-2) \cdot [e^x \cdot (x-2) + e^x - e]$$

$$= 2(e^x - e) \cdot (x-2) \cdot (x \cdot e^x - 2e^x + e^x - e) = 2\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{(e^x - e)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{(x-2)} \cdot (x \cdot e^x - e^x - e)$$

$$K(x) = x \cdot e^x - e^x - e$$

$$K'(x) = x \cdot e^x$$

$$K(1) = -e < 0$$

$K(2) = 2e^x - e^x - e = e^x - e > 0$

$K(1) \cdot K2) < 0$ Από Θ. Bolzano

υπάρχει: $x_0 \in (1,\ 2) : K(x_0) = 0$

x		0	
K'	-	0	+
K	↘		↗

Στο (1,2) η κ(x) είναι 1-1 άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική

x		1		x_0		2	
x-2	-		-		-	0	+
e^x-x	-	0	+		+		+
K(x)	-		-	0	+		+
g’(x)	-		+		-		+
	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗